

Applied Numerical Analysis

Design of a cantilevered beam

黃玠鋒 9469504 張明新 9569514

曾勝龍 9569504 林倉毅 9569515

劉豐吉 9569506 林政達 9569517

姜方有 9569526

Instructor: Dr. S-Y. Chen

Degree Program of Automation and Precision Engineering

College of Engineering

National Chaio Tung University

Contents

Contents	1
Abstract	2
List of Figures	3
List of Tables	4
Introduction	5
Chapter 1 Formulation	6
Chapter 2 Result & Discussion	9
Chapter 3 Discussion and Conclusions	21
Reference	24



Abstract

設計懸臂樑，需同時考慮各種受力情況與使用斷面形狀，檢查其安全性是否符合使用規範。近年來由於設計自動化的推行，遂而將設計變數透過電腦程式的計算，以求取最佳化的設計結果，來達到省時、省力、較經濟的設計方式，以符合時代潮流的發展方向。SmartDo 智慧型最佳化系統是我們所採用於驗證設計懸臂樑最佳化的應用程式，進而與另一套商用套裝軟體 Matlab 進行最佳化的數值分析比較，以求取正確的設計結果。下表為本組人員名單及工作分發狀況。

成員	工作分發
黃玠鋒	有限元素分析 ANSYS 參數模型建立與驗證/SmartDo 程式應用
曾勝龍	統整相關資訊與撰寫期末專題報告/SmartDo 程式應用
劉豐吉	協助相關資訊搜尋/SmartDo 程式應用
張明新	協助相關資訊搜尋/SmartDo 程式應用
林倉毅	公式推導/ Matlab 與 SmartDo 比較/SmartDo 程式應用
林政達	統整相關資訊與撰寫期末專題報告/SmartDo 程式應用
姜方有	統整相關資訊與撰寫期末專題報告/SmartDo 程式應用



List of Figures

圖 1.1	6
圖 2.1	12
圖 2.2	13
圖 2.3	13
圖 2.4	14
圖 2.5	14
圖 2.6	15
圖 2.7	15
圖 2.8	16
圖 2.9	16
圖 2.10	17
圖 2.11	17
圖 2.12	18
圖 2.13	18
圖 2.14	19
圖 3.1	21
圖 3.2	22
圖 3.3	22



List of Tables

表 2.1	20
表 2.2	20
表 3.1	23



Introduction

在機械設計上，如何兼顧機構部份的強度及質量，一直是精密機械的重要課題。其原因在於經驗法則及實際狀況中，機構強度越大則其體積也越大，相對帶來的則是質量越大。在機械設計中為避免運動元件質量太大，而造成動力的損失、甚至是機械被自己本身重量所壓垮，對於元件質量則是追求輕量化。這是一種兩相矛盾及相互抵觸的狀態。因此也為最佳化的一個課題。

Design of a cantilevered beam

實務上所用的機架，包括圓形或是矩形，不會使用實心的構造，多使用空心構型，或是工字樑（H beam）。設計一工字型懸臂樑，如圖 1 所示，初始尺寸為外形長、寬皆為 80 cm，剖面結構皆為 9 cm。即 $b=80\text{ cm}$ 、 $h=80\text{ cm}$ 、 $s=9\text{ cm}$ 、 $t=9\text{ cm}$ 。分別考慮承受垂直 P_y 或水平 P_z 的力量，求最大變形量不可大於 0.5 cm，因最大的變形發生在末端，故即求其末端的位移量不可大於 0.5 cm，即在 Y 方向或 Z 方向的位移，須小於 0.5 cm，允許最大應力為 14000 N/cm^2 ，以上述條件，設計一懸臂樑以最省材料(即體積最小、質量最小)為目標。



Chapter 1

Formulation

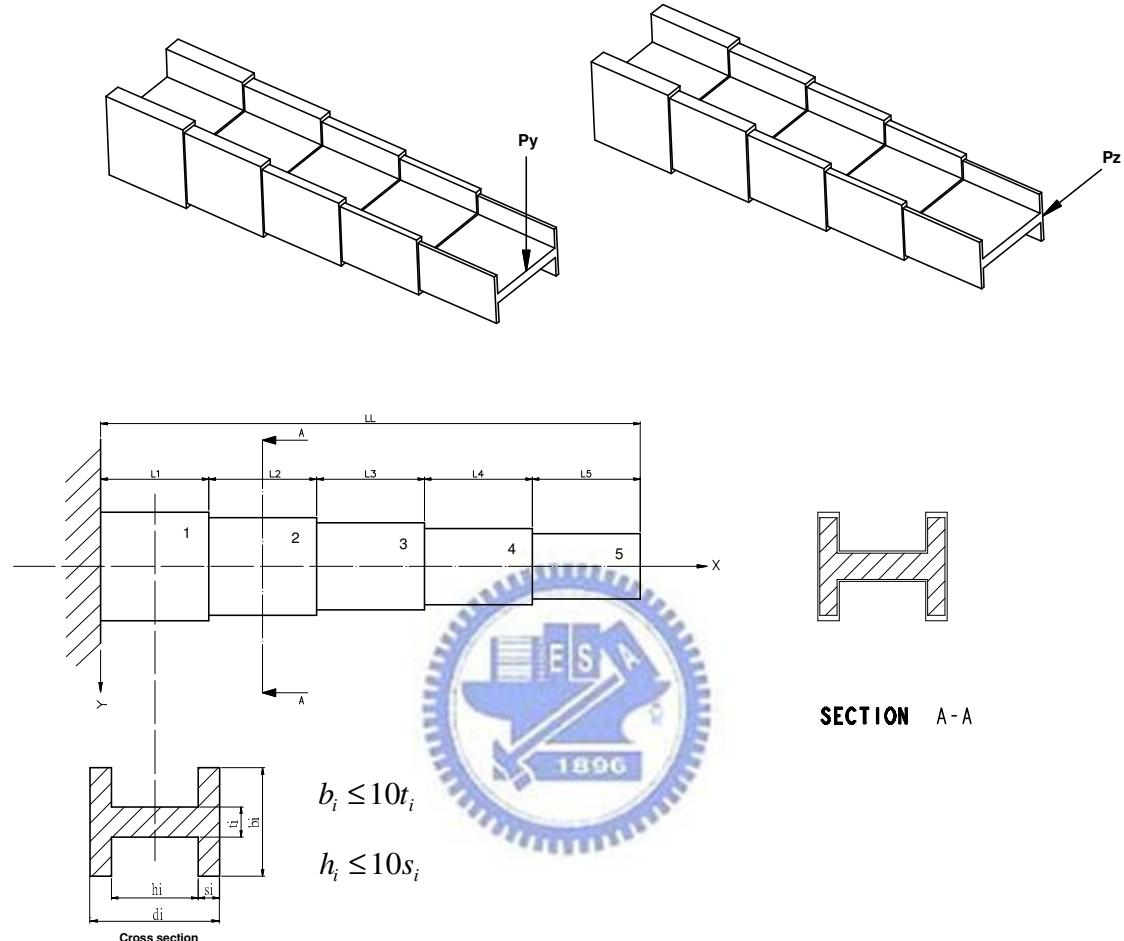


圖 1 懸臂梁示意圖

幾何尺寸共分成五段，每段剖面尺寸限制如 cross section & section A-A。

$$P_y = 50,000 \text{ N}$$

$$P_z = 50,000 \text{ N}$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$$

$$L = 500 \text{ cm}$$

$$l_i = 100 \text{ cm}$$

$$\bar{\sigma} = 14000 \text{ N/cm}^2 \text{ (allowable stress)}$$

$$\bar{y} = \bar{z} = 0.5 \text{ cm} \text{ (allowable at free end)}$$

The deflection D_{yi} & D_{zi} at the right end of segment i is calculated by the following recursion formulas:

$$y_0 = y'_0 = 0$$

$$y'_i = \frac{Pl_i}{EI_{zi}} \left[L + \frac{l_i}{2} - \sum_{j=1}^i l_j \right] + y'_{i-1}$$

$$Dy_i = \frac{Pl_i^2}{2EI_{zi}} \left[L - \sum_{j=1}^i l_j + \frac{2l_i}{3} \right] + y'_{i-1} l_i + y_{i-1}$$

$$z_0 = z'_0 = 0$$

$$z'_i = \frac{Pl_i}{EI_{yi}} \left[L + \frac{l_i}{2} - \sum_{j=1}^i l_j \right] + z'_{i-1}$$

$$Dz_i = \frac{Pl_i^2}{2EI_{yi}} \left[L - \sum_{j=1}^i l_j + \frac{2l_i}{3} \right] + z'_{i-1} l_i + z_{i-1}$$

Where the deflection Dy & Dz is defined as positive downward , y' & z' is the derivative of y with respect to x (the slope), and l_i is the length of segment i . Young's modulus E is the same for all segments, and the moment of inertia for segment i is I_{yi} & I_{zi} .

The bending moment at the left end of segment i is calculated as

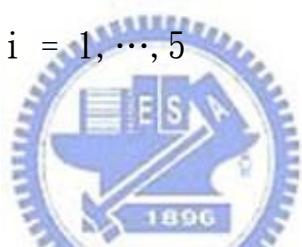
$$M_i = P \left[L + l_i - \sum_{j=1}^i l_j \right] \quad i = 1, \dots, 5$$

the corresponding maximum bending stress is

$$\sigma_{yi} = \frac{M_i b_i}{2I_{zi}} \quad i = 1, \dots, 5$$

$$\sigma_{zi} = \frac{M_i d_i}{2I_{y_i}} \quad i = 1, \dots, 5$$

The design task is now defined as

Design variables : $X = \{ b_i, t_i, h_i, s_i \} \quad i = 1, \dots, 5$	Design variables (x 20)
Minimize the volume $V(b_i, t_i, h_i, s_i, L_i) = \sum_{i=1}^N (2b_i \times s_i + h_i \times t_i) \times L_i$	Objective Function
Subject to : 1. $\frac{\sigma_{yi}}{\sigma} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, 5$ 2. $\frac{\sigma_{zi}}{\sigma} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, 5$ 3. $\frac{Dy_5}{\bar{y}} - 1 \leq 0$ 4. $\frac{Dz_5}{\bar{y}} - 1 \leq 0$ 	Constraint Function (x12)
5. $\frac{b_i}{10t_i} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, 5$ 6. $\frac{h_i}{10s_i} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, 5$ 7. $\frac{h_i}{h_{i+1}} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, (5-1)$	Geometry Constraint Function (x 14)
8. $b^L \leq b_i \leq b^U \quad i = 1, \dots, n$ 9. $t^L \leq t_i \leq t^U \quad i = 1, \dots, n$ 10. $h^L \leq h_i \leq h^U \quad i = 1, \dots, n$ 11. $s^L \leq s_i \leq s^U \quad i = 1, \dots, n$	Lower/Upper Bounds

Chapter 2

Result & Discussion

(1) Result

初始值為 $b=80\text{ cm}$ 、 $h=80\text{ cm}$ 、 $s=9\text{ cm}$ 、 $t=9\text{ cm}$ 。再增加測試初始值皆設為1，為為比較，其所得數據分列如下：

SmartDo _ioptmzr =1	SmartDo _idflt =1 (Feasible Direction Method, FDM)	Minimum Material Volume : 315060.8000 cm ³
i :	1	2
b(i):	89.5591	76.3080
s(i):	3.4180	3.4250
t(i):	8.9803	7.6464
h(i):	34.1024	34.1635
Izz(i):	411267.2782	254911.7551
Iyy(i):	245742.3706	210550.6421
$\sigma_y(i)$:	2722.0476	2993.5053
$\sigma_z(i)$:	2082.3775	1947.9144
Dy(i):	0.0142	0.0595
Dz(i):	0.0237	0.0913
Izz(i):	140265.8400	56019.2459
Iyy(i):	173522.6049	128813.4628
$\sigma_y(i)$:	3340.8050	4102.9283
$\sigma_z(i)$:	1776.3129	1600.1449
Dy(i):	0.1450	0.2884
Dz(i):	0.1978	0.3374
Izz(i):	18637.9458	89572.9950
$\sigma_y(i)$:	4270.9911 N/cm ²	
$\sigma_z(i)$:	1152.0126 N/cm ²	
Dy(i):	0.5063 cm	
Dz(i):	0.4991 cm	

SmartDo_idflt =15 (Recursive Conjugate FDM, RCFDM, minor nonlinearity)

Minimum Material Volume : 314652.7000 cm³

i :	1	2	3	4	5
b(i):	89.3217	76.8210	63.1958	48.2976	29.5043 cm
s(i):	3.4111	3.4133	3.4159	3.4190	3.4204 cm
t(i):	8.9359	7.6855	6.3221	4.8339	2.9530 cm
h(i):	34.0958	34.1169	34.1438	34.1730	34.1879 cm
Izz(i):	407176.8031	259198.7240	144406.0632	64520.8643	14714.8561
Iyy(i):	244417.6650	210608.8632	173658.2950	133075.9511	81398.3744
$\sigma_y(i)$:	2742.1037	2963.7866	3282.1920	3742.7862	5012.6654 N/cm ²
$\sigma_z(i)$:	2092.6255	1944.0553	1769.6654	1540.8892	1260.1234 N/cm ²
Dy(i):	0.0143	0.0596	0.1441	0.2811	0.5005 cm
Dz(i):	0.0239	0.0917	0.1984	0.3376	0.4996 cm

SmartDo _idflt =16 (Recursive Conjugate FDM, RCFDM, high nonlinearity)

Minimum Material Volume : 314650.8000 cm³

i :	1	2	3	4	5
b(i):	89.5145	77.0453	63.6282	48.4353	28.8171 cm
s(i):	3.4081	3.4114	3.4131	3.4139	3.4146 cm
t(i):	8.9603	7.7056	6.3689	4.8470	2.8820 cm
h(i):	34.0618	34.0956	34.1061	34.1150	34.1234 cm
Izz(i):	409458.0174	261331.1744	147272.6334	64975.7756	13686.8747
Iyy(i):	244258.2956	210837.5075	174333.0659	132800.7471	79061.1100
$\sigma_y(i)$:	2732.7118	2948.1856	3240.3291	3727.1783	5263.6322 N/cm ²
$\sigma_z(i)$:	2091.9428	1940.7597	1760.9552	1541.5108	1294.9674 N/cm ²
Dy(i):	0.0142	0.0593	0.1429	0.2783	0.5003 cm
Dz(i):	0.0239	0.0917	0.1984	0.3375	0.4996 cm

Matlab result

Minimum Material Volume : 314498.5887 cm³

i :	1	2	3	4	5
b(i) :	89.41482858	77.02272510	63.63307274	48.38351843	29.05562850 cm
s(i) :	3.40909044	3.40909044	3.40909044	3.40909044	3.40909044 cm
t(i) :	8.94148286	7.70227251	6.36330727	4.83835184	2.90556285 cm
h(i) :	34.09090441	34.09090441	34.09090441	34.09090441	34.09090441 cm

SmartDo Initial condition=1

Minimum Material Volume : 314653.7000 cm³

i :	1	2	3	4	5
b(i):	89.5165	77.0793	63.7063	48.5550	28.6083 cm
s(i):	3.4086	3.4114	3.4119	3.4141	3.4148 cm
t(i):	8.9581	7.7138	6.3752	4.8597	2.8610 cm
h(i):	34.0589	34.0849	34.0905	34.1108	34.1158 cm
Izz(i):	409551.7968	261677.9624	147759.0797	65463.7243	13392.4139
Iyy(i):	244257.1030	210815.3991	174317.1526	133110.0459	78459.1940
$\sigma_y(i)$:	2732.1492	2945.5790	3233.6216	3708.5409	5340.3853 N/cm ²
$\sigma_z(i)$:	2091.8611	1940.4527	1760.3330	1537.7912	1304.6753 N/cm ²
Dy(i):	0.0142	0.0592	0.1427	0.2777	0.5004 cm
Dz(i):	0.0239	0.0917	0.1984	0.3374	0.4996 cm

Matlab Initial condition=1

Minimum Material Volume : 174926.4327 cm³

i :	1	2	3	4	5
b(i) :	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000 cm
s(i) :	80.33569132	70.73418498	59.66275392	46.16919735	27.83139121 cm
t(i) :	100.00000000	100.00000000	100.00000000	91.67543021	56.36506107 cm
h(i) :	2.63323943	2.63323943	2.63323943	2.63323943	2.63323943 cm
Izz(i) :	219450.0088	219448.4086	219446.5633	169078.2483	39298.2606
Iyy(i) :	363073.3777	249509.7495	151317.8519	71521.9036	16593.7045
$\sigma_y(i)$:	56.9606	45.5688	34.1769	29.5721	63.6160 N/cm ²
$\sigma_z(i)$:	5622.3009	5775.3899	6044.8294	6639.3391	8782.8367 N/cm ²
y(i) :	0.0266	0.0987	0.2051	0.3370	0.5000 cm
Dz(i) :	0.0161	0.0654	0.1535	0.2900	0.5000 cm

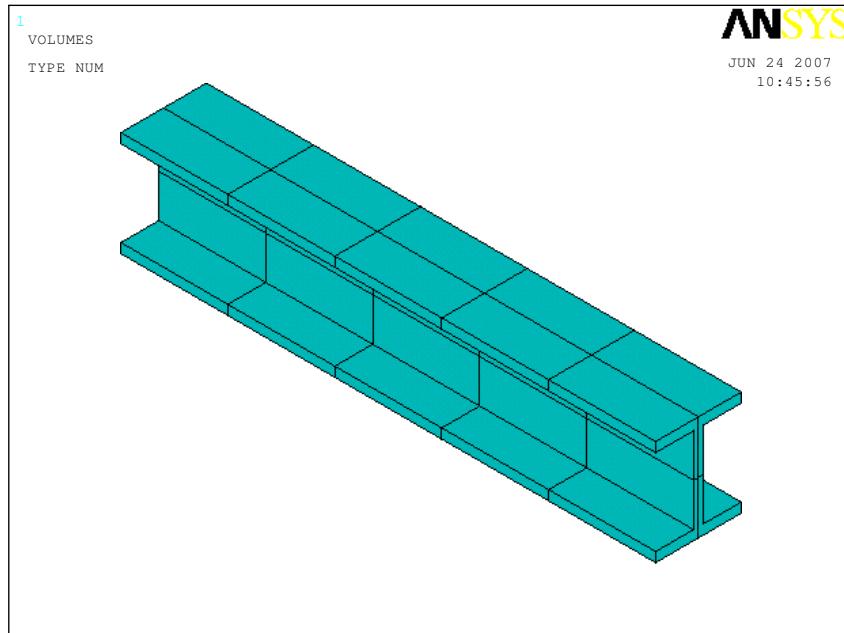


(2) Initial Design and the Final Design also the lower/upper bounds, with exact values and graphics showing the two shapes.

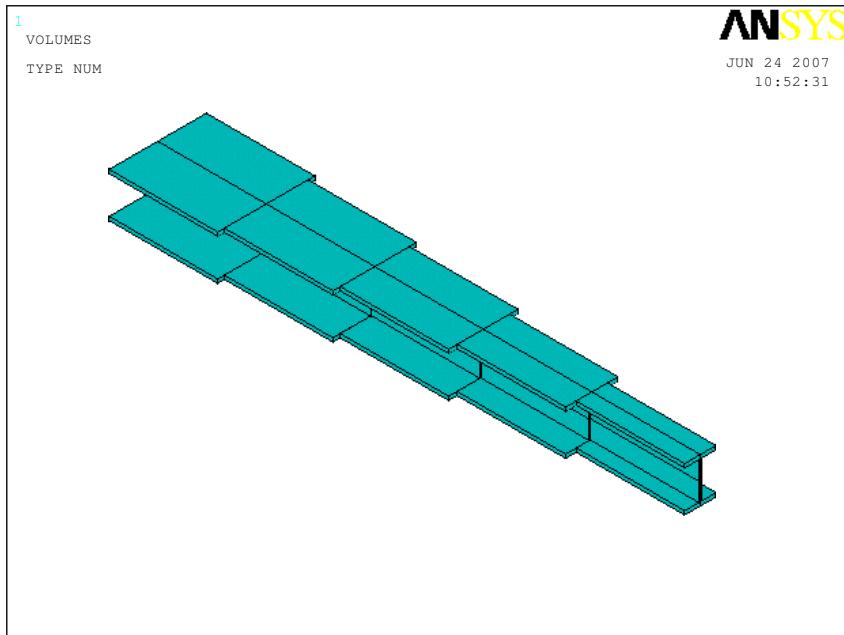
藉由 SmartDo 及 Matlab 軟體進行數值分析，所得到之最佳化的結果，將上列所得的數據，由 ANSYS 所繪出之其輕量化的外型分列如下。

(2.1)Initial : $b=80$ cm、 $h=80$ cm、 $s=9$ cm、 $t=9$ cm。

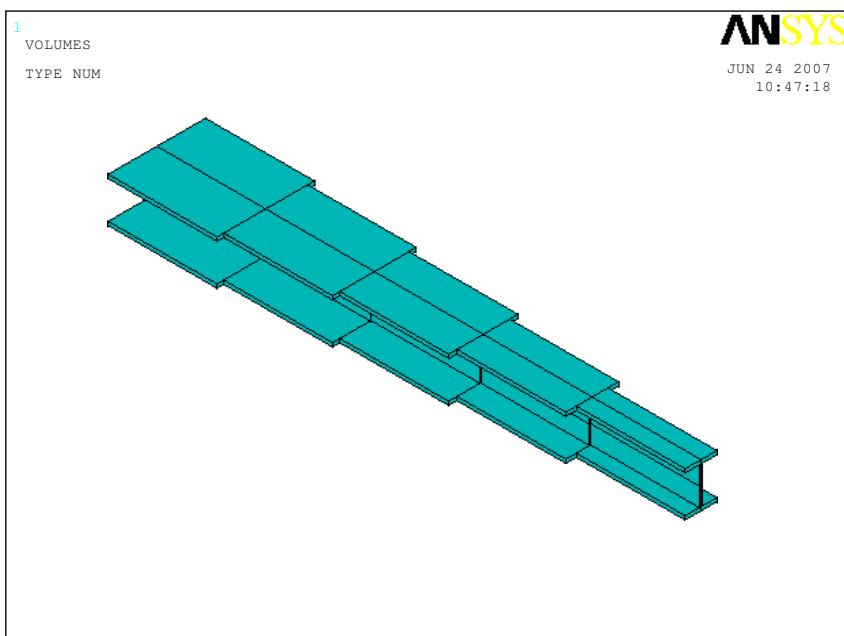
Initial condition：為最初所設定的狀況。圖 2.1。



SmartDo final condition：以SmartDo的數據套入ANSYS，構型繪出為下。圖2.2。

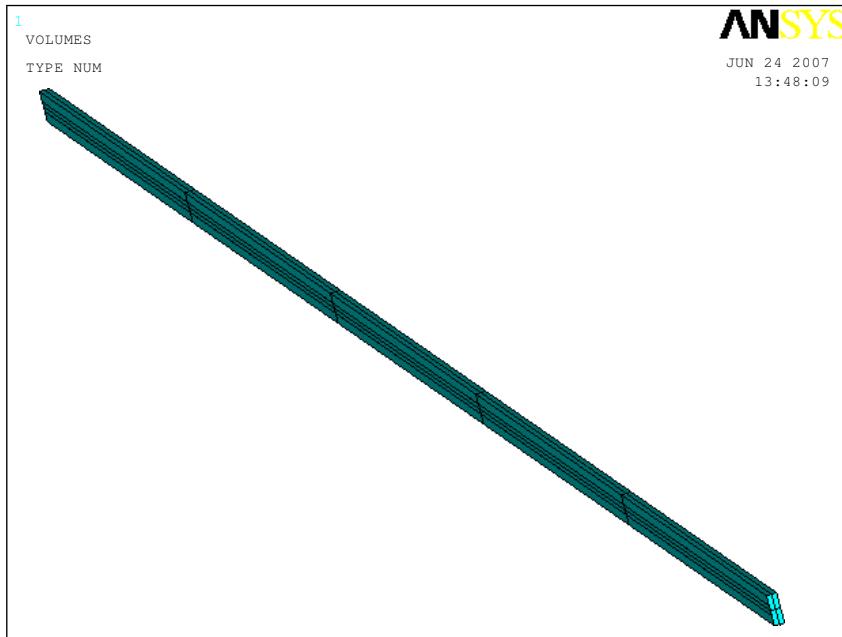


Matlab final condition：以Matlab的數據套入ANSYS，構型繪出為下。圖2.3。

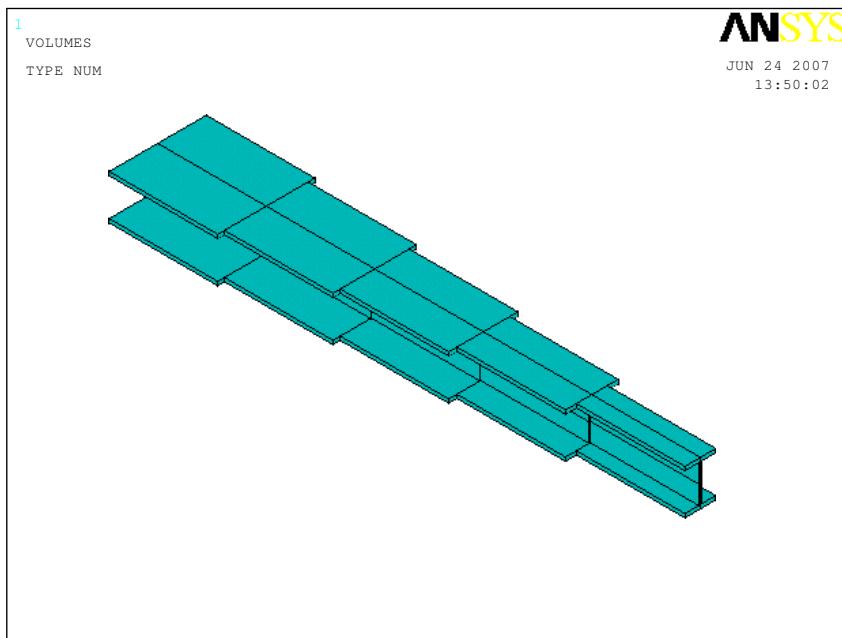


(2.1)Initial : 1。

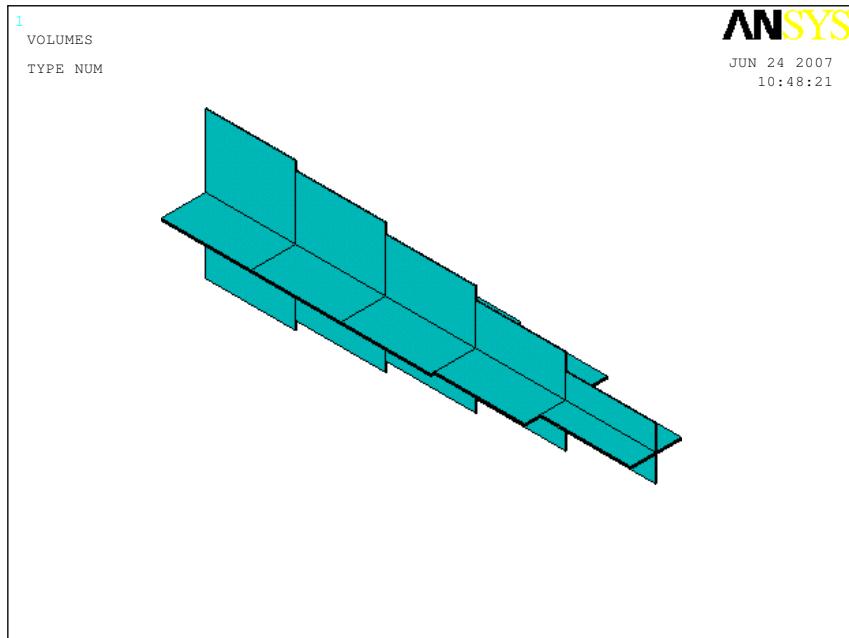
Initial condition：為最初所設定的狀況。圖 2.4。



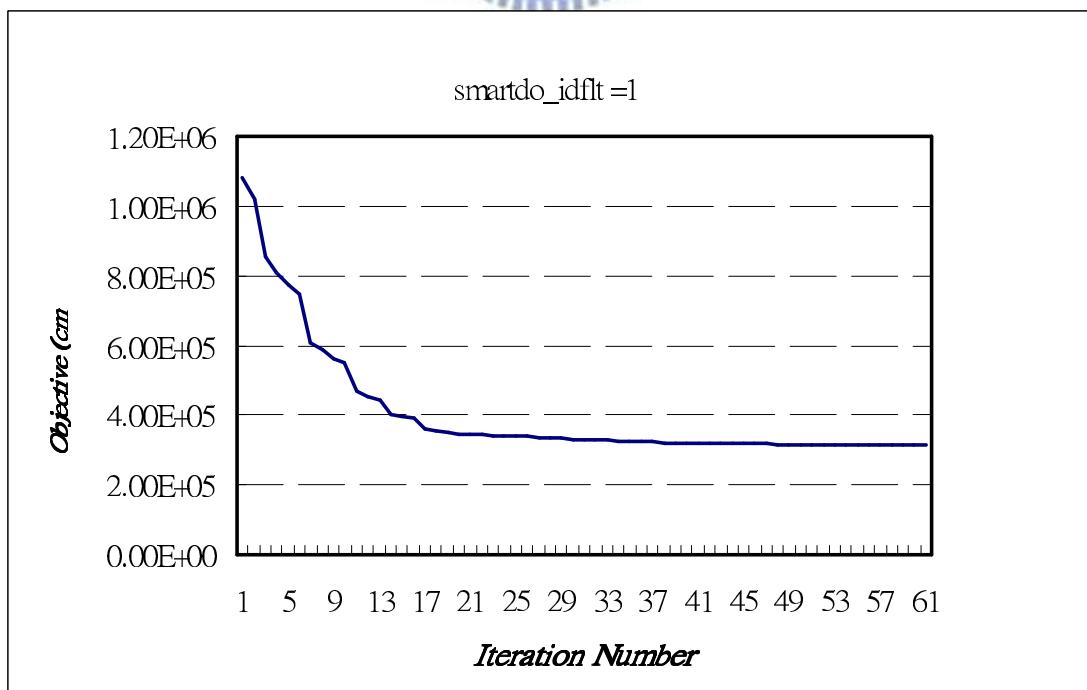
SmartDo final condition：初始值以1代入SmartDo，得出的數據套入ANSYS，構型繪出為下。圖2.5。



Matlab final condition：初始值以1代入Matlab，得出的數據套入ANSYS，構型繪出為下。圖2.6。



(3) The curve of Design Iteration Number (X-Axis) VS the Objective Function Value (Y-Axis). 圖2.7。



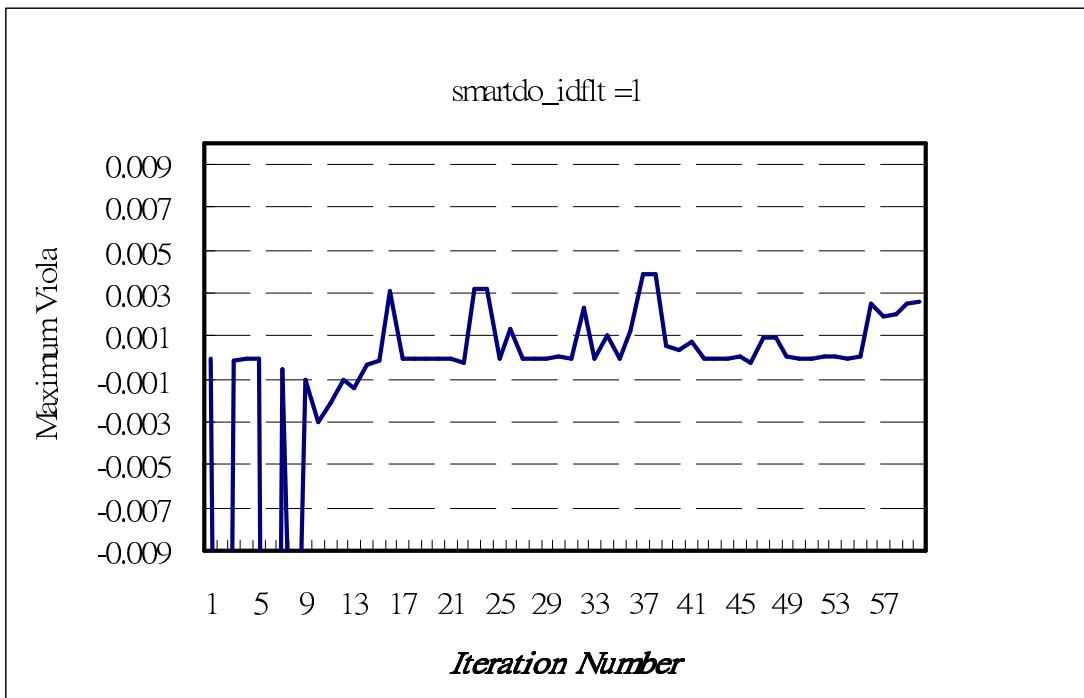


圖 2.8。

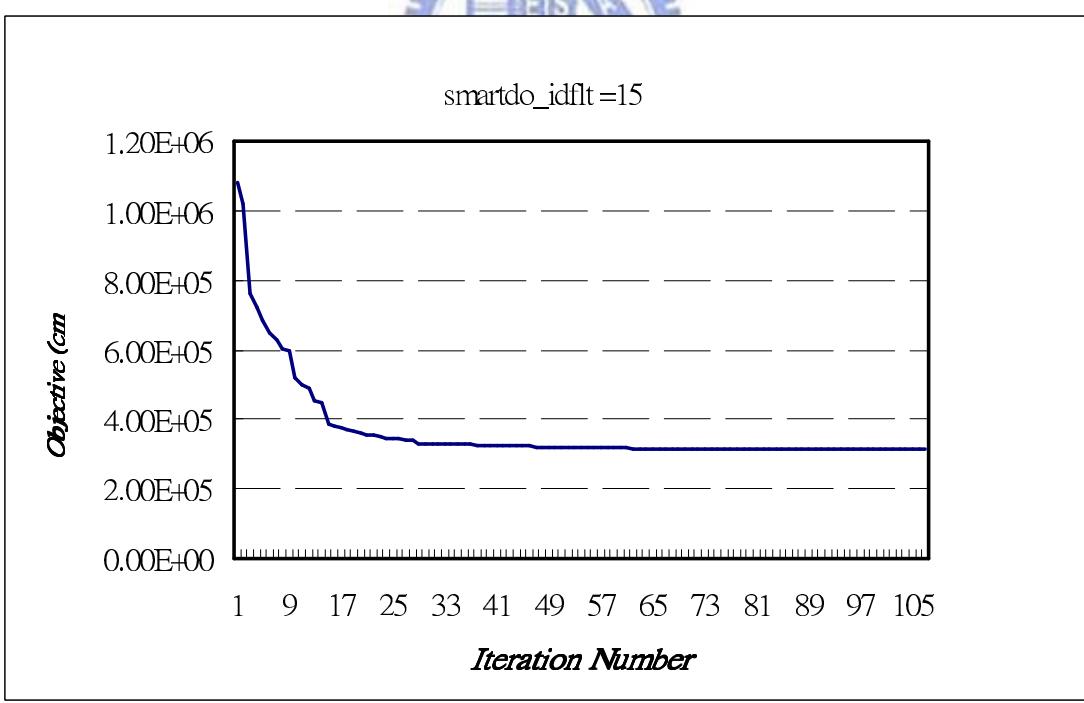


圖 2.9。

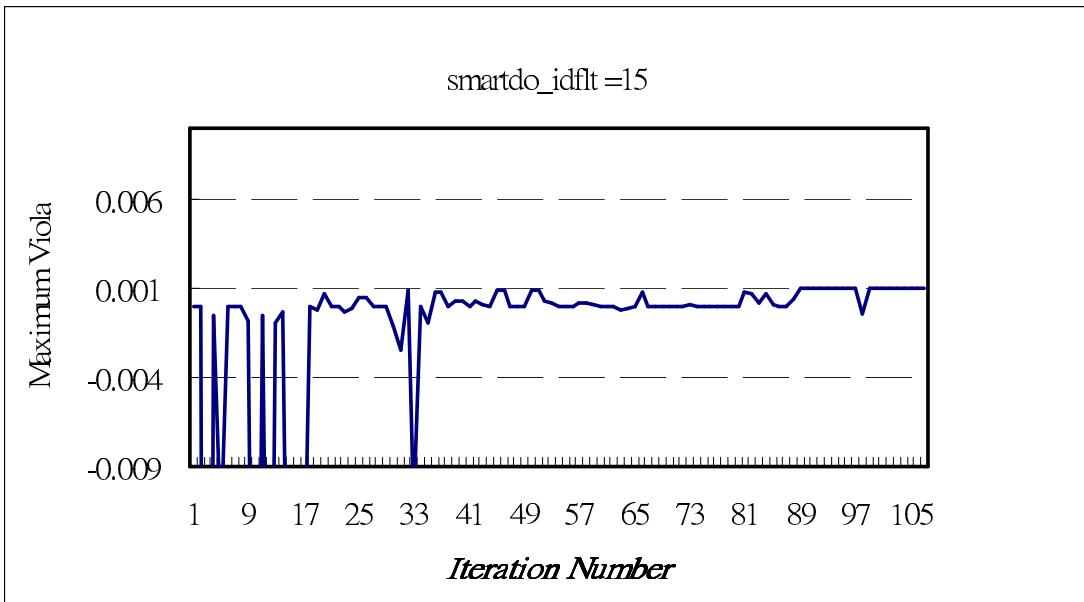


圖 2.10。

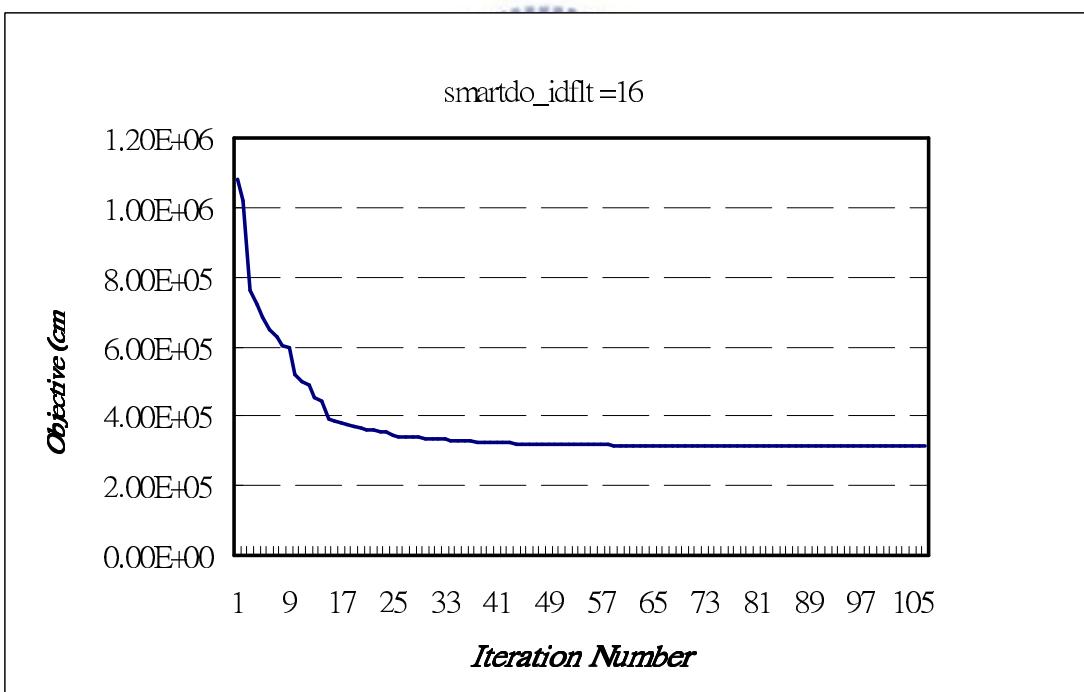


圖 2.11。

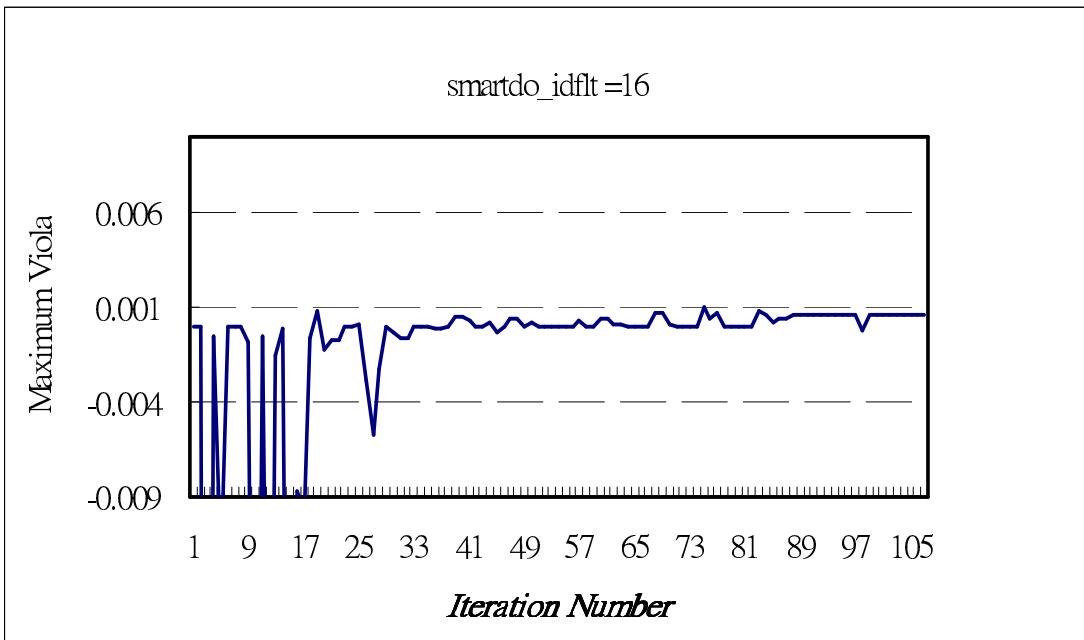


圖 2.12。

Matlab

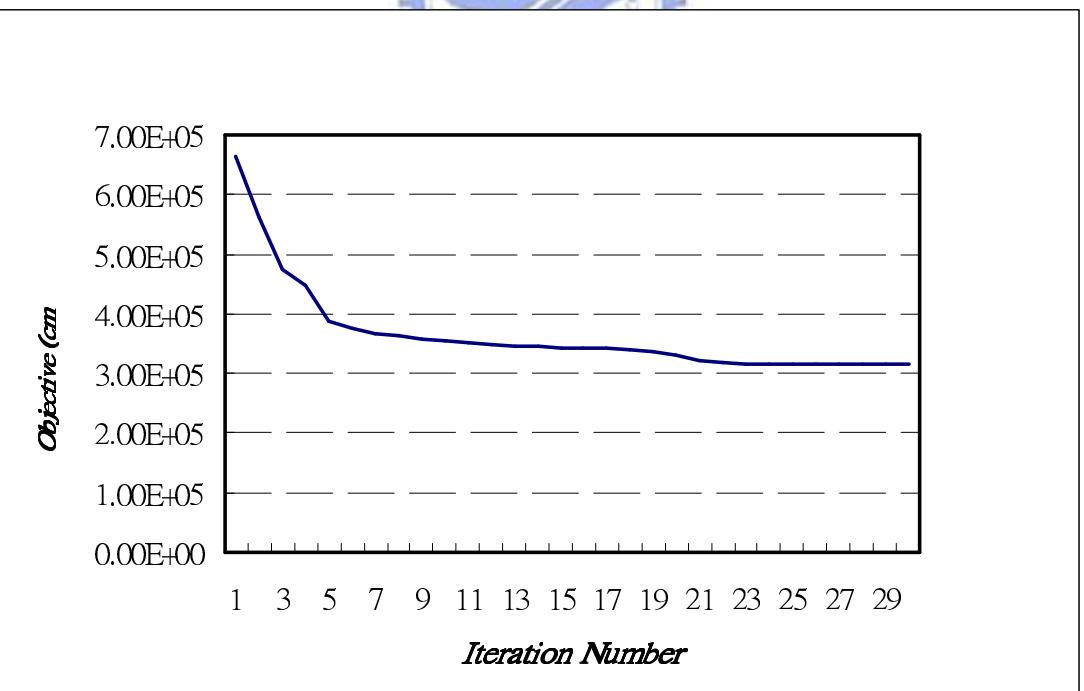


圖 2.13。

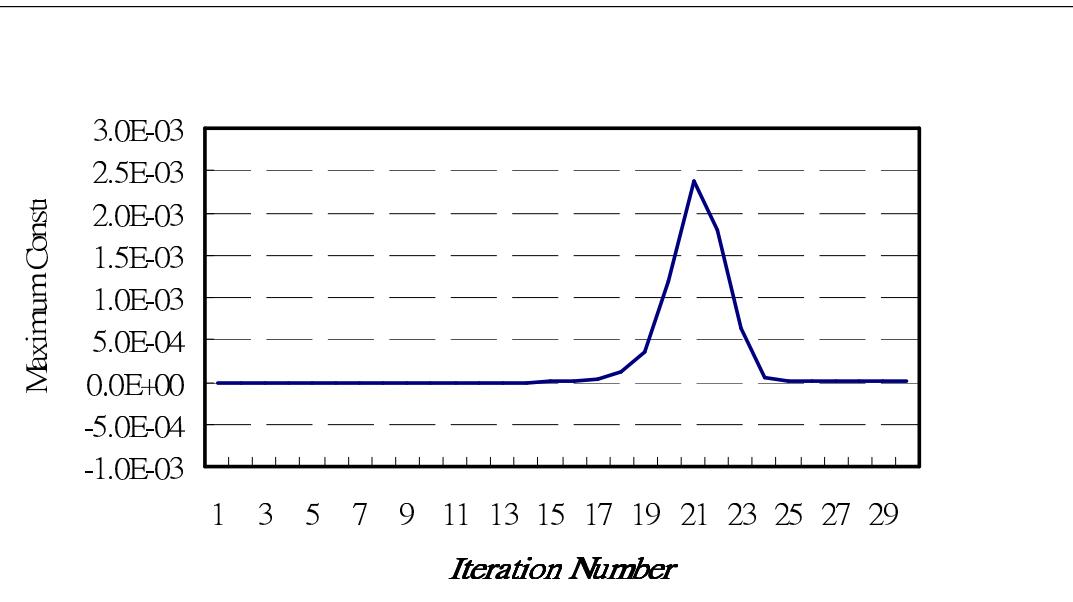


圖 2.14。



(5) List and brief description of all the SmartDo input and output files, and the input/output files of external packages, if you have used them.

Cantilever.bat.tcl	程式批次檔
Cantilever.tcl	主程式
Cantilever_cns.tcl	Constrain Function
Cantilever_obj.tcl	Constrain Objection Function
Cantilever_display.tcl	結果輸出
Shape_smartdo.tmp	最後形狀設計值輸出樣版 file
Shape_smartdo.inp	最後形狀設計值輸出檔，(to Ansys input file)
SmartDo 執行程式如下：	
1. 執行 Cantilever.bat.tcl 即可	
2. 輸出尺寸至 Shape_smartdo.inp	
3. 由 Ansys read Shape_smartdo.inp 繪出幾何	

表 2.1。SmarDo 檔案說明及程式執行步驟

Cantilever.m	主程式
Cantilever_cns.m	Constrain Function
Cantilever_obj.m	Constrain Objection Function
grep.m	數值輸出至樣版 file 的副程式
Shape_matlab.tmp	最後形狀設計值輸出樣版 file
Shape_matlab.inp	最後形狀設計值輸出檔，(Ansys input file)
Matlab 執行程式如下：	
1. 執行 Cantilever.m 即可	
2. 輸出尺寸至 Shape_matlab.inp	
3. 由 Ansys read Shape_matlab.inp 繪出幾何	

表 2.2。Matlab 檔案說明及程式執行步驟

Chapter 3

Discussion and Conclusions

運用 CAD 套裝軟體，繪出 3D 實體模型，來呈現物體的幾何形狀、位置、大小，以利於客戶與使用者瞭解，實際的產品狀況與幾何模型。例如：有限元素的實體模型，如下圖 3.1 所示。

在決定模型控制參數變數、分析控制邊界條件及分析目標函數後，建立起給 SmartDo 的*.txt for ANSYS 參數模型設定檔（設定 ANSYS 模型參數、邊界條件及求解方式）、*.tcl (entry file)、*cns.tcl (邊界條件)、*obj.tcl (目標條件)，在建立 ANSYS CAE 參數模型時，以實體 (solid) 方式建立樑結構 (cantilever beam structures) 之參數模型（圖 2-1），再以套入 SmartDo 模式運算。在 CAE 運算過程中出現結構上應力集中（圖 3.2），運算的最大應力值比 formulation 出來的大很多，所以無法符合對照數學模式的最佳化運算分析結果，CAE 分析結果和 formulation 分析數據越差越大，所以在 CAE 分析上無法和 formulation 對應比較。

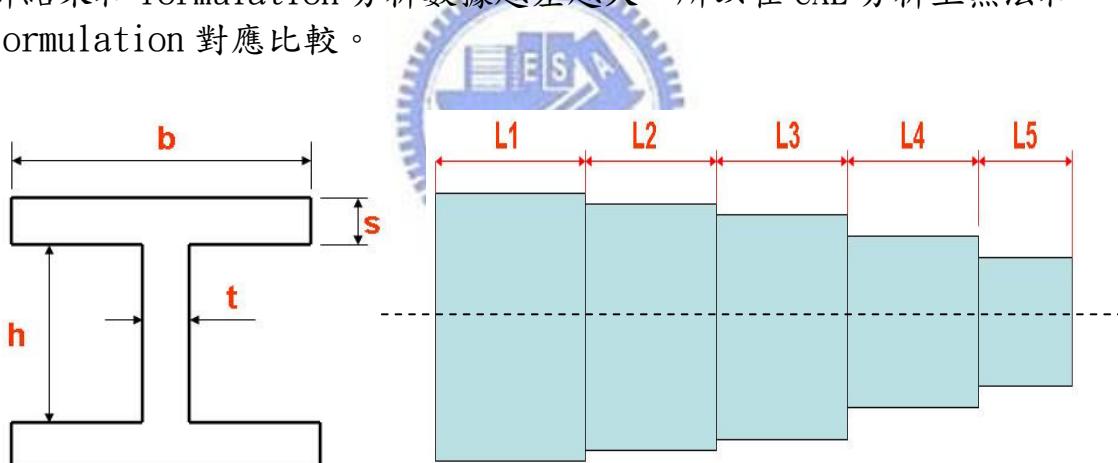


圖 3.1 CAE 參數模型

所以經過以上有限元素分析問題討論後，對於樑結構 (beam structures) 的模型建立，結構上在 CAE 必須以樑元素 (beam element) 來建構分析模型（圖 3.3），樑元素模型最主要是用來分析細長、承受彎曲的結構元件。

CAE 環境以樑元素建立之模型，在結構分析上每一段之樑結構接合處不會出現應力集中問題，符合 formulation 的方式，同時相對於 3D solid 的模型上準確性高且運算上可以省下很多有限元素運算時間，樑元素每個段面也可以從 Real Constants 去控制斷面參數，可以由此建

建立起樑元素參數模型以提供 SmartDo 最佳化模式運算分析，如此才 CAE 分析模型分析結果才可以和 formulation 的分析結果有一個對應。

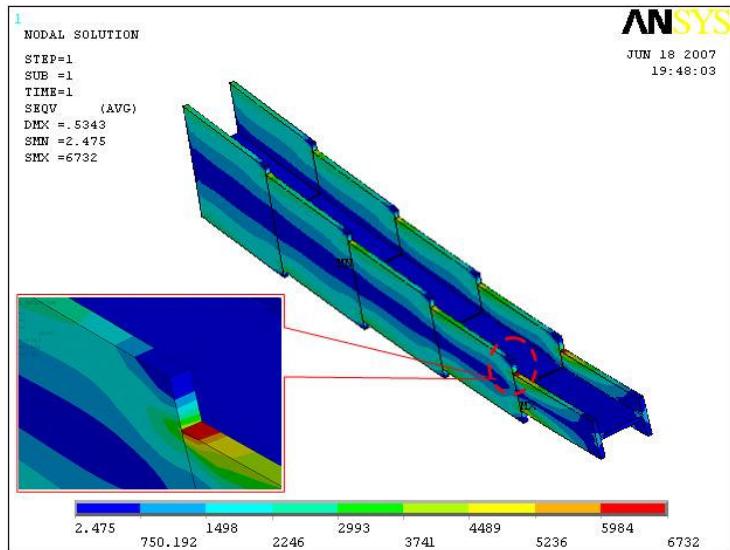


圖 3.2 應力集中

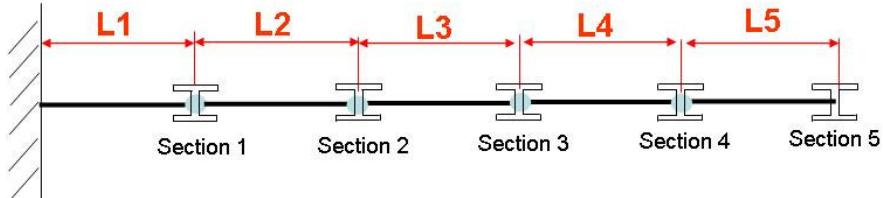


圖 3.3 樑結構 (beam structures) 模型

數值分析最佳化是藉由電腦執行數值運算，得出所需要的構型，以減少開發過程的 try and error，及減少開發所需時間。經由 Matlab 及 SmartDo 的程式驗證後，可以很明確的得到， b 、 s 、 t 、 h 的尺寸變小，由此延伸得知體積有變小，此為本報告所要的結論，茲將這些數據與 Initial 列於下表比較。

另一個以初始值皆設定為 1 的驗證部份，則因為限制條件設定不夠嚴謹之故，所以發生以 SmartDo 運算可以求出工字樑，而 Matlab 運算則求出十字樑。

		1	2	3	4	5
b	Initial	80	80	80	80	80
	Matlab	89.41481207	77.02272839	77.02272839	48.38351919	29.05563078
	Smartdo	89.5145	77.0453	63.6282	48.4353	28.8171
s	Initial	9	9	9	9	9
	Matlab	3.40909049	3.40909049	3.40909049	3.40909049	3.40909049
	Smartdo	3.40808	3.41145	3.41313	3.41388	3.41461
t	Initial	9	9	9	9	9
	Matlab	8.94148121	7.70227284	6.36330783	4.83835192	2.9055630
	Smartdo	8.96029	7.70555	6.36886	4.84699	2.88203
h	Initial	80	80	80	80	80
	Matlab	34.09090493	34.09090493	34.09090493	34.09090493	34.09090493
	Smartdo	34.0618	34.0956	34.1061	34.115	34.1234

表 3.1



Reference

1. Numerical optimization techniques for engineering design : with applications / Vanderplaats, Garret N./ New York/McGraw-Hill/c1984.
2. Matlab 使用手冊
3. SmartDo 教學講義

